

1.6. LOGARYTMOWANIE

Definicja logarytmu

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad \begin{array}{l} a > 0; a \neq 1 \\ b > 0 \end{array}$$

a - podstawa logarytmu

b - liczba logarytmowana

c - wynik logarytmowania

Własności logarytmu

$\log_{10} x = \log x$ - logarytm dziesiętny

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Przykład 1.6.1. Oblicz:

a) $\log_2 32$ b) $\log_4 4$ c) $\log_4 1$ d) $\log \frac{1}{10}$ b) $5^{\log_5 9}$

Rozwiązanie	Komentarz
a) $\log_2 32 = 5$, bo $2^5 = 32$	Korzystamy z definicji $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
b) $\log_4 4 = 1$	$\log_a a = 1$
c) $\log_4 1 = 0$	$\log_a 1 = 0$
d) $\log \frac{1}{10} = \log_{10} \frac{1}{10} = -1$, bo $10^{-1} = \frac{1}{10}$	
b) $5^{\log_5 9} = 9$	$a^{\log_a x} = x$

Przykład 1.6.2. Oblicz

a) $\log_{\sqrt{3}} 9$

b) $\log 10\sqrt[3]{10}$

Rozwiązanie	Komentarz
<p>a) $\log_{\sqrt{3}} 9 = x$</p> $\sqrt{3}^x = 9$ $3^{\frac{1}{2}x} = 3^2$ $\frac{1}{2}x = 2 / \cdot 2$ $x = 4$ $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4, \text{ bo } (\sqrt{3})^4 = 9$	<p>Obliczając wartości logarytmu (w bardziej skomplikowanych przykładach) możemy skorzystać z definicji</p> $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ <p>zamienić równanie logarytmiczne na równanie wykładnicze.</p> <p>Rozwiązując równanie wykładnicze doprowadzamy obie strony równania do potęgi o tej samej podstawie. Następnie podstawy opuszczamy.</p>
<p>b)</p> $\log 10\sqrt[3]{10} = x$ $10^x = 10\sqrt[3]{10}$ $10^x = 10 \cdot 10^{\frac{1}{3}}$ $10^x = 10^{1\frac{1}{3}}$ $x = 1\frac{1}{3}$	<p>Jak wyżej.</p>

Prawa działań na logarytmach

$$\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$n \log_a x = \log_a x^n$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Przykład 1.6.3. Oblicz

a) $4^{\log_2 9}$ b) $\log 8 + \log 125$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15$ d) $\frac{\log_6 125}{\log_6 5}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{aligned} \text{a) } 4^{\log_2 9} &= 2^{2\log_2 9} = 2^{\log_2 9^2} = \\ &= 2^{\log_2 81} = 81 \end{aligned}$	Korzystamy ze wzoru $n \log_a x = \log_a x^n$ oraz $a^{\log_a x} = x$
$\text{b) } \log 8 + \log 125 = \log(8 \cdot 125) = \log 1000 = 3$	Korzystamy ze wzoru $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$
$\begin{aligned} \text{c) } \log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15 &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{0,6}{0,15} = \log_{\frac{1}{2}} 4 \\ \log_{\frac{1}{2}} 4 &= x \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= 4 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ x &= -2 \\ \log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15 &= -2 \end{aligned}$	Korzystamy ze wzoru $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
$\text{d) } \frac{\log_6 125}{\log_6 5} = \frac{\log_6 5^3}{\log_6 5} = \frac{3\log_6 5}{\log_6 5} = 3$	Korzystamy ze wzoru $n \log_a x = \log_a x^n$. Skracamy $\log_6 5$.

Przykład 1.6.4. Oblicz wartość wyrażenia $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$.

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{aligned} \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 &= \\ &= \log_3 4 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 7} = \\ &= \log_3 9 = 2 \end{aligned}$	Korzystając ze wzoru $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ zamieniamy $\log_4 5, \log_5 7, \log_7 9$ na logarytmy o podstawie 3. Skracamy wyrażenia $\log_3 4, \log_3 5, \log_3 7$

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 1.6.1. Oblicz:

- a) (1pkt.) $\log_3 81$
- b) (1pkt.) $\log 0,001$
- c) (1pkt.) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.6.2. Oblicz:

- a) (1pkt.) $2\log 5\sqrt{5} + \log 8$
- b) (1pkt.) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.6.3. (1pkt.) Oblicz: Wiedząc, że $\log_5 x = 1,52$. Oblicz: $\log_5 \left(\frac{1}{x}\right)$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.6.4. (2pkt.) Oblicz bez użycia tablic: $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zamiana $\log_{\sqrt{6}} 3$.na logarytm o podstawie 3.	1
2	Podanie ostatecznej odpowiedzi.	1

